

O Modelo de Drude para Interação com os Metais

Bernardo Amorim

Instituto de Física de São Carlos - USP

12/06/2018

Sumário

Marcos Históricos Relevantes

O Modelo de Drude

Aplicações Teóricas

Conclusões

References

Marcos Históricos Relevantes

Contexto Científico

- ▶ (1897) J.J. Thomson - Observação de cargas negativas.
- ▶ (1900) Nascimento da Mecânica Quântica
- ▶ (1900) P. Drude - Criação do Modelo



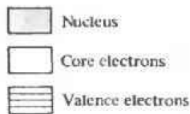
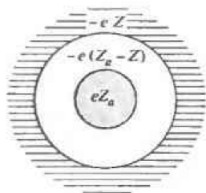
(a)



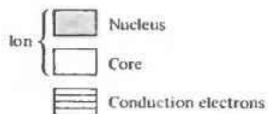
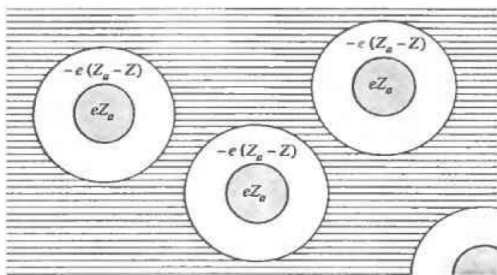
(b)

Figure 1: (a) J.J. Thomson; (b) P. Drude;

Em um metal hipotético:



(a)



(b)

Figure 3: (a) Átomo isolado. (b) Esquema de uma configuração em um metal genérico.

Densidade Eletrônica

Definido como:

$$n = N/V = \frac{N_a Z \rho_m}{A}. \quad (1)$$

- ▶ N_a : Número de Avogadro.
- ▶ A : Massa Atômica.
- ▶ ρ_m : Densidade de Massa do Metal.

Exemplo: Cobre ($Z_a = 29$) $\rightarrow 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^1 3d^{10}$

$$n = \frac{(6,02 \times 10^{23}) \times 1 \times (8,96)}{63,546} = \boxed{8,47 \times 10^{22} \text{ elétrons/cm}^3}. \quad (2)$$

Principais Considerações

Para adquirir consistência:

- ▶ Aproximação de Elétron Livre e Independente;
- ▶ Colisões Instantâneas;
- ▶ Tempo de Relaxação (τ);

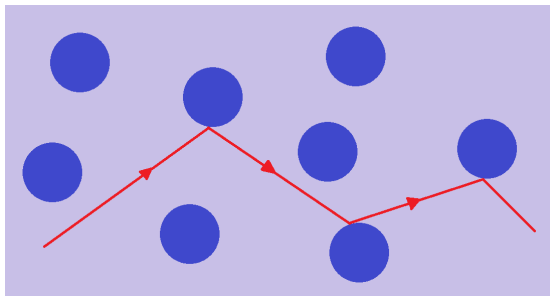


Figure 4: Trajetória de um elétron de condução espalhado pela colisão entre os íons de acordo com Drude.

Condutividade Elétrica

Lei de Ohm:

$$U = RI \longleftrightarrow \vec{E} = \rho \vec{J}$$

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

- ▶ ρ : Resistividade (intrínseco ao material)

Definição de Condutividade:

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$

(3)

Condutividade DC em Metais (Campo Constante)

Relação entre a densidade de corrente e o momento linear dos elétrons:

$$\vec{J} = -\frac{ne}{m_e} \vec{p} \quad (4)$$

Equação de movimento (sem a ideia de Drude):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e\vec{E} \quad (5)$$

Resolvendo:

$$J_i(t) = \left(\frac{ne^2 E_i}{m_e} \right) t. \quad (6)$$

Problema:

$$\boxed{J_i(\infty) \rightarrow \infty} \quad (7)$$

Condutividade DC em Metais (Campo Constante)

Solução proposta por Drude:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\vec{p}}{\tau} - e\vec{E}. \quad (8)$$

Resolvendo:

$$J_i(t) = \frac{ne^2\tau}{m_e}(1 - e^{-t/\tau})E_i. \quad (9)$$

Logo

$$\vec{J} = \frac{ne^2\tau}{m_e}\vec{E} \quad (10)$$

Conseqüências:

$$\boxed{\sigma = \frac{ne^2\tau}{m_e} \equiv \sigma_0} \quad \& \quad \boxed{\tau = \frac{m_e}{ne^2\rho}} \quad (11)$$

Condutividade DC em Metais (Campo Constante)

Elemento	ρ ($10^{-9}\Omega\cdot\text{cm}$)	τ (10^{-14}s)
Li	12,4	0,61
Cu	2,24	1,9
Ag	2,13	2,8
Au	2,84	2,1

Table 1: Os valores dessa tabela se referem a temperatura ambiente ($T = 373\text{K}$).

Equação Geral para Descrever Elétrons de Condução em Metais:

$$\boxed{\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = -\frac{\vec{p}(t)}{\tau} + \vec{F}(t)}. \quad (12)$$

Condutividade AC em Metais (Campo Oscilante)

Campo Elétrico da forma:

$$\vec{E}(t) = \text{Re}(\vec{E}(\omega)e^{-i\omega t}) \quad (13)$$

Soluções do tipo:

$$\vec{p}(t) = \text{Re}(\vec{p}(\omega)e^{-i\omega t}) \quad (14)$$

Resultando em:

$$\vec{J}(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau} \vec{E}(\omega) \quad (15)$$

onde

$$\sigma(\omega) = \sigma_R(\omega) + i\sigma_I(\omega) = \left(\frac{\sigma_0}{1 + \omega^2\tau^2} \right) + i \left(\frac{\sigma_0\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \right). \quad (16)$$

Condutividade AC em Metais (Campo Oscilante)

Limites:

- ▶ Quando $\omega \rightarrow 0$:

$$\sigma(\omega \rightarrow 0) \rightarrow \sigma_0 \quad (17)$$

- ▶ Quando $\omega \gg 1$:

$$\sigma(\omega \gg 1) \approx i\sigma_I(\omega \gg 1) \quad (18)$$

Efeito Hall e Magnetorresistência

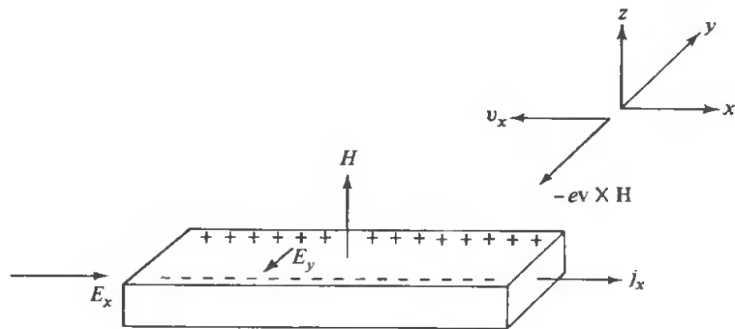


Figure 5: Esquema simbólico do experimento efeito Hall.

Quantidades Importantes:

$$\boxed{R_H = \frac{E_y}{J_x H}} \quad \& \quad \boxed{\rho(H) = \frac{E_x}{J_x}} \quad (19)$$

Efeito Hall e Magnetoresistência

Equação a resolver:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\vec{p}}{\tau} - e \left(\vec{E} + \frac{1}{m_e c} \vec{p} \times \vec{H} \right), \quad (20)$$

ou melhor:

$$\frac{d\vec{J}}{dt} + \frac{\vec{J} - \sigma_0 \vec{E}}{\tau} - \frac{e}{m_e c} \vec{H} \times \vec{J} = 0. \quad (21)$$

Efeito Hall e Magnetorresistência

Soluções:

$$\begin{aligned}\sigma_0 E_x &= \frac{eH}{m_e c} \tau J_y + J_x, \\ \sigma_0 E_y &= -\frac{eH}{m_e c} \tau J_x + J_y.\end{aligned}$$

Porém $J_y = 0$, e as consequências são:

$$\boxed{R_H = -\frac{1}{nec}} \quad \& \quad \boxed{\rho(H) = \frac{1}{\sigma_0}} \quad (22)$$

Conclusões

- ▶ Resultados satisfatórios para o cálculo da condutividade.
- ▶ Livre Caminho Médio $l_D = \bar{v}\tau$:
Drude (equipartição clássica da energia a $T = 373K$)

$$\bar{v}_D \sim 10^7 \text{ cm/s} \Rightarrow \boxed{l \sim 1 - 10 \text{ \AA}} \quad (23)$$

- ▶ Porém é uma teoria quântica, e a velocidade média é maior. Logo o espaçamento entre íons é maior do que Drude supunha.
- ▶ O modelo também falha na predição do coeficiente Hall. Em geral, depende do campo aplicado e podem ser positivos (e.g. Alumínio).

Conclusões

- ▶ Falha também ao prever que $\rho(H)$ não depende do campo.

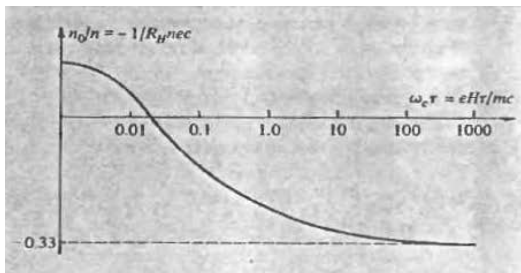


Figure 6: Variação do número $-1/R_H n e c$ em função de $e H \tau / m_e c$, para o Alumínio (Al).

- ▶ Soluções e explicações desses problemas se tornam possíveis com a Mecânica Quântica (Sommerfeld).
- ▶ O modelo de Drude funciona para alguns casos e é prático.

Referências

[1] Neil Ashcroft; David Mermin (1976). Solid State Physics. Saunders College.

[2] Oliveira, Ivan S.; de Jesus, Vitor L.B. (2005), Introdução à Física do Estado Sólido. Livraria da Física

[3] Falconer (2001) “Corpuscles to electrons”

[4] Drude, Paul (1900). “Zur Elektronentheorie der Metalle”. Annalen der Physik. 306 (3): 566.

OBRIGADO!